

Übungen zur Vorlesung Numerik I

(Blatt 10)

Sommersemester 2004

**Abgabe der Aufgaben bis 29.06.04, 18.00 Uhr
im Postfach 84 Ebene 6**

Aufgabe 1:

(7 Punkte)

Sei $p \in \Pi_3$ das Polynom, das die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ an den Stützstellen $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 9$ interpoliert.

- Bestimmen Sie p mit der Formel von Lagrange.
- Bestimmen Sie p mit der Newtonschen Interpolationsformel.
- Das Polynom $p_2 \in \Pi_2$ interpoliere $f(x) = \sqrt{x}$ in den Knoten 1,2,3. Geben Sie eine Abschätzung für den Interpolationsfehler im Intervall $[1, 3]$.

Aufgabe 2:

(4 Punkte)

Gegeben seien 23 verschiedene Punkte im Intervall $[-1, 1]$ und das Interpolationspolynom p vom Höchstgrad 22, welches die Funktionswerte von $f(x) = \cosh(x)$ an diesen 23 Punkten interpoliert. Zeigen Sie, daß

$$\left| \frac{p(x) - f(x)}{f(x)} \right| \leq 5 \cdot 10^{-16}$$

für alle $x \in [-1, 1]$ gilt.

Aufgabe 3:

(5 Punkte)

- Es seien $n + 1$ verschiedene Zahlen $x_i, i = 0, \dots, n$ und $m + 1$ verschiedene Zahlen $y_j, j = 0, \dots, m$ gegeben. Zeigen Sie: Zu den $(n + 1)(m + 1)$ reellen Zahlen $f_{ij}, i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom

$$P_{nm}(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} x^i y^j$$

mit

$$P_{nm}(x_i, y_j) = f_{ij}, \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m.$$

- b) Diskutieren Sie die Existenz und Eindeutigkeit von Polynomen $P(x, y)$ der Grade ≤ 1 bzw. ≤ 2 mit

$$P(i, j) = \begin{cases} i + 2j, & \text{für } i, j \in \{0, 1\}, \quad i + j < 2, \\ \alpha, & \text{für } i = j = 1, \end{cases}$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$. Unter dem Polynomgrad des Polynoms $x^\nu y^\mu$ wird die Summe $\nu + \mu$ verstanden.

Aufgabe 4:

(4 Punkte)

Bestimmen Sie den Interpolationsfehler zwischen der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ und dem zugehörigen Interpolationspolynom $P(x)$.

- a) Für $x \in [0, 1]$ und $n=3$.
- b) Es sei $n=3$ und $x \in [\varepsilon, 1 + \varepsilon]$. Bestimmen Sie ein $\varepsilon > 0$, so dass der Interpolationsfehler kleiner als 10^{-5} wird.
- c) Es sei $x \in [1, 2]$. Zeigen Sie, dass es ein Interpolationspolynom vom Grade n gibt, so dass der Interpolationsfehler kleiner als 10^{-5} wird.